5. VĚTA O LOKÁLNÍ BIFURKACI

• Bifurkace v $\mathbb{R}^2$

„bifurkace" = rozvětvení

Buď
- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ třídy C^p $(p>2)$ na nějakém okolí bodu $(0,0)$,
- $f(0,0) = 0$,
- $f'(0,0) = (0,0)$.

Pak (z Taylorovy věty) na nějakém okolí bodu $(0,0)$ platí:

$$f(x,y) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\cdot xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\, y^2\right]}_{f''(0,0)(x,y)} + \underbrace{o\left(\|(x,y)\|^2\right)}_{\to 0}$$

pro $(x,y) \to (0,0)$

$f''(0,0)(x,y)$ ... kvadratická forma

Pomocí věty o implicitní funkci se dá dokázat (MORSE):

je-li navíc matice kvadratické formy $f''(0,0)$ regulární, existuje (lokální) transformace souřadnic

$$\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

takové, že

- ξ je třídy C^{p-2} na nějakém okolí $(0,0)$,
- $\xi(0,0) = (0,0)$, $\xi'(0,0) = Id$
- $f(x,y) = \frac{1}{2} f''(0,0)(\xi(x,y))$

- **Příklad**

Zkoumejme malé hodnoty funkce (kvadratické formy)

$$G(x,y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

kde matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ je symetrická a regulární,

tzn. $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$

Je-li $\boxed{D > 0}$, je G buď pozitivně definitní (pro $a_{11} > 0$) nebo negativně definitní ($a_{11} < 0$) a

$$G(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$$

... nejde o bifurkaci

Je-li $\boxed{D<0}$, je G <u>indefinitní</u>

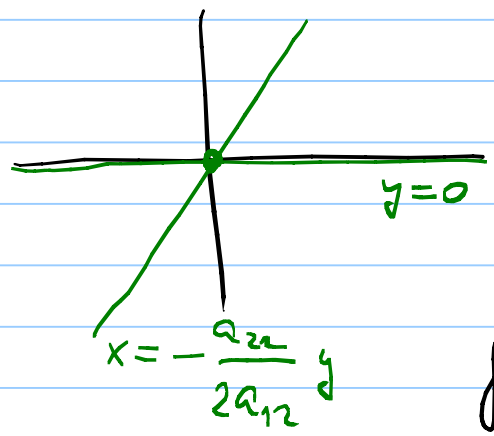
Rozlišme dva případy

- $a_{11}=0$

Pak $G(x,y)=0 \iff y\,(\underbrace{2a_{12}}_{\neq 0}x + a_{22}y)=0$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\, y=0 \ \vee \ x=-\frac{a_{22}}{2a_{12}}y \,\right]$$

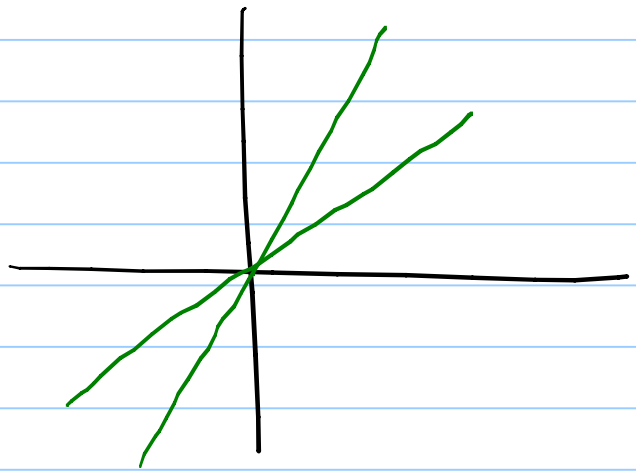


jde o <u>kuželosečku</u>

- $a_{11}\neq 0$

Pak $G(x,y)=0 \iff x=\dfrac{-2a_{12}y \pm \sqrt{4a_{12}^2y^2-4a_{11}a_{22}y^2}}{2a_{11}}$

$$\iff x=\frac{-a_{12}y \pm \sqrt{-D}\,|y|}{2a_{11}} = \frac{(-a_{12} \mp \sqrt{-D})\,y}{2a_{11}}$$



jde o <u>kuželosečku</u>

Věta.

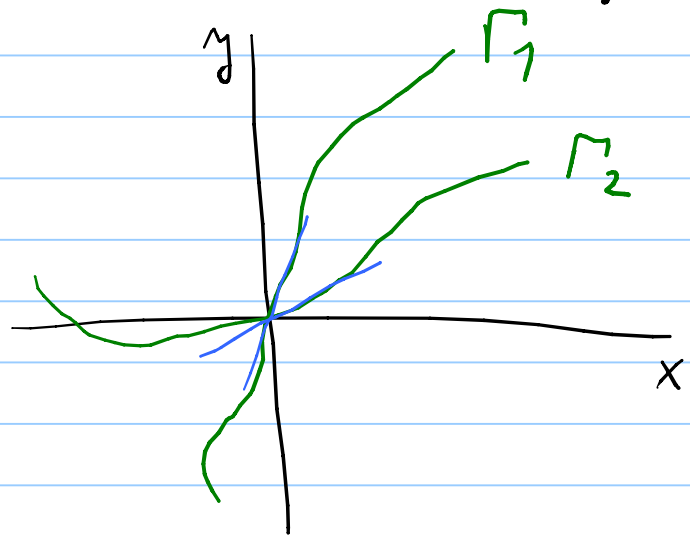
Nechť

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je třídy C^p $(p>2)$ na nějakém okolí bodu $(0,0)$,
- $f(0,0)=0$, $f'(0,0)=(0,0)$,
- $f''(0,0)$ je indefinitní kvadratická forma s regulární maticí

Pak existuje okolí U bodu $(0,0)$ takové, že

$$U \cap \{(x,y): f(x,y)=0\} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

kde Γ_1 a Γ_2 jsou dvě C^{p-2} křivky protínající se s nenulovým úhlem v $(0,0)$.



Důsledek (jednodimenzionální Crandall–Rabinowitzova bifurkační věta)

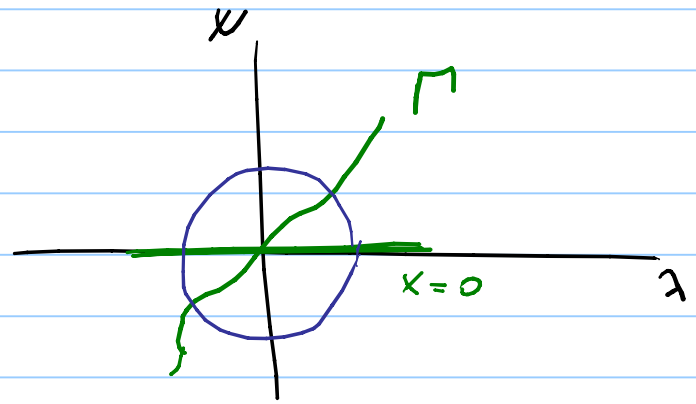
Nechť

- $f = f(\lambda, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je třídy C^p $(p > 2)$ na nějakém okolí bodu $(0,0)$
- $f(\lambda, 0) = 0$ pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \neq 0$

Pak $\lambda = 0$ je bodem bifurkace rovnice $f(\lambda, x) = 0$ a v nějakém okolí bodu $(0,0)$ platí

$$f(\lambda, x) = 0 \iff \left[x = 0 \ \vee \ (\lambda, x) \in \Gamma \right],$$

kde
- $\Gamma = \{(\lambda, x) : \lambda = \hat{\lambda}(x),\ x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$
- $\Gamma \in C^{p-2}$
- $\hat{\lambda}(0) = 0$



- Cvičení. Rozhodněte, zda $\lambda = 0$ je bodem bifurkace rovnice $f(\lambda, x) = 0$, je-li

a) $f(\lambda, x) = x^3 - \lambda x$,

b) $f(\lambda, x) = x^3 - \lambda x - \sin(\lambda x)$,

c) $f(\lambda, x) = x^3 - \lambda x + \sin(\lambda x)$,

d) $f(\lambda, x) = x^3 - \lambda^2 x$.

Lokální bifurkační věta (Crandall, Rabinowitz) 1971

Nechť

- X, Y jsou Banachovy prostory,
- $f: \mathbb{R} \times X \to Y$ je třídy C^2 na nějakém okolí bodu $(0,0)$,
- $f(\lambda, 0) = 0$ pro $\forall \lambda \in (-\delta, \delta)$,
- $\dim \operatorname{Ker} f_2'(0,0) = \operatorname{codim} \operatorname{Im} f_2'(0,0) = 1$,

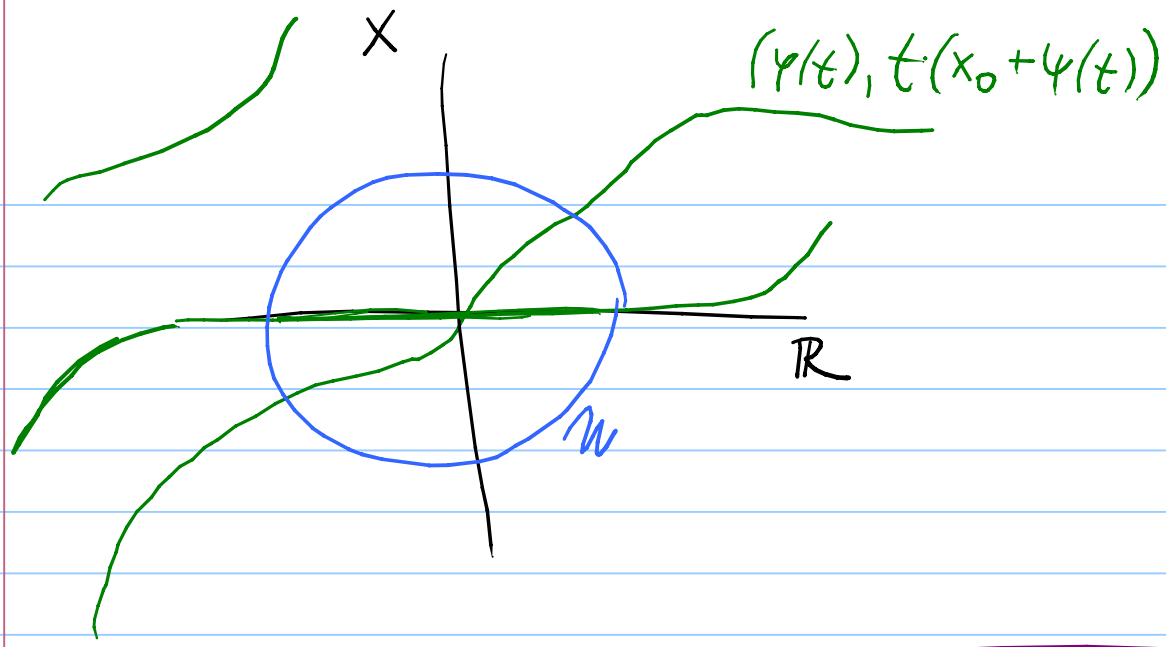
  ($f_2'(0,0)$ je Fredholmův operátor)
- $X = \operatorname{Ker} f_2'(0,0) \oplus X_1 = \operatorname{Lin}\{\underset{\neq 0}{x_0}\} \oplus X_1$,
- $f_{1,2}''(0,0)(1, x_0) \notin \operatorname{Im} f_2'(0,0)$.

Pak existuje C^1 křivka $(\varphi, \psi): (-\xi, \xi) \to \mathbb{R} \times X_1$ taková, že

$$\varphi(0) = 0, \ \psi(0) = 0, \ f(\varphi(t), t \cdot (x_0 + \psi(t))) = 0.$$

Navíc: existuje okolí U bodu $(0,0)$ v $\mathbb{R} \times X$ takové, že

$$\left.\begin{array}{l} f(\lambda, x) = 0 \\ \text{pro } (\lambda, x) \in U \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} x = 0 \\ \vee \\ \lambda = \varphi(t), \ x = t \cdot (x_0 + \psi(t)) \text{ pro nějaké } t \end{array}$$



Příklad. Hledejme nekonstantní 2π-periodické řešení nelineární rovnice (kyvadla)

$$x''(t) + \lambda \sin x(t) = 0$$

Uvažujme zobrazení

$$f = f(\lambda, x) : \mathbb{R} \times X \longrightarrow Y$$

$$f(\lambda, x)(t) = x''(t) + \lambda \sin x(t)$$

$$X = \{x \in C^2(\mathbb{R}) : x \text{ je } 2\pi\text{-periodická}\}$$

$$\|x\| = \sup_{t\in\langle 0,2\pi\rangle} |x(t)| + \sup_{t\in\langle 0,2\pi\rangle} |x'(t)| + \sup_{t\in\langle 0,2\pi\rangle} |x''(t)|$$

$$Y = \{y \in C(\mathbb{R}) : y \text{ je } 2\pi\text{-periodická}\}$$

$$\|y\| = \sup_{t\in\langle 0,2\pi\rangle} |y(t)|$$

Pak

$$(f_2'(\lambda,0))(h)(t) = h''(t) + \lambda h(t),$$

a proto

$$\ker f_2'(0,0) = \{x \in X : x \text{ je konstantní funkce}\}$$

$$\operatorname{Im} f_2'(0,0) = \{y \in Y : \int_0^{2\pi} y(s)\,ds = 0\}$$

Navíc:

$f_{12}''(0,0)(1,c) = c$ pro každou konstantní funkci $x(t) = c$

Všechny předpoklady předchozí věty jsou splněny. Bod $(0,0)$ je bodem bifurkace $f(\lambda,x) = 0$.